https://doi.org/10.16888/interd.2022.39.2.17

El desarrollo de la noción de "mitad" en niños de dos comunidades shipibo-konibo de Ucayali

The development of the notion of "half" in children from two Ucayali's Shipibo-Konibo communities

Jorge Villalba Garcés[1], Susana Frisancho Hidalgo[2] y Luis Lam Pimentel[3]

[1]Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. https://orcid.org/0000-0002-2843-9854
E-mail: jvillalba@pucp.pe
[2]Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. https://orcid.org/0000-0002-5517-7597
E-mail: sfrisan@pucp.edu.pe
[3]Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. https://orcid.org/0000-0001-6871-7081
E-mail: luis.lam@pucp.edu.pe

La presente investigación fue financiada por la Pontificia Universidad Católica del Perú. Proyecto de investigación 2014-0008: Evaluación de competencias cognitivas y morales en niños y adolescentes de comunidades shipibo (Ucayali) y percepción sobre la educación en sus comunidades.

Pontificia Universidad Católica del Perú
Lima, Perú

Resumen

La presente investigación tuvo como objetivo identificar y describir los niveles de desarrollo de la noción de "mitad" en un grupo de niños de dos comunidades indígenas pertenecientes al pueblo shipibo-konibo de la región Ucayali, en la Amazonía del Perú. Se trabajó con 14 estudiantes de edades entre 7 y 13 años, seis de ellos pertenecientes a la comunidad de Bethel y ocho a la comunidad de Bena Jema. Todos fueron evaluados utilizando el método clínico-crítico de Jean Piaget. Los estudiantes de la comunidad de Bethel fueron evaluados con una tarea centrada en cantidades discretas y los de la comunidad de Bena Jema, con la misma tarea y con otra centrada en cantidades continuas. Los desempeños de los participantes evidenciaron cuatro niveles de desarrollo en cada una de las tareas. Sus respuestas fueron consistentes con otras investigaciones que evaluaron la misma noción en contextos occidentales. Los resultados apoyan la universalidad en la construcción de la noción de "mitad", pero evidencian un retraso en la adquisición de los niveles por parte de los niños evaluados, si se toma como referencia los currículos nacionales. Se discuten los hallazgos resaltando la universalidad de las estructuras lógico-matemáticas y la necesidad de repensar el momento y la forma en que la noción de "mitad" aparece en el currículo.

Palabras clave: mitad, constructivismo, método clínico-crítico, matemáticas, shipibo-konibo

Abstract

This research aims to identify and describe developmental levels of the notion of "half" in a group of children from two Shipibo-Konibo native communities of the Ucayali region, in the Peruvian Amazon rainforest. Fourteen students aged between 7 and 16 participated, six from Bethel community and eight from Bena Jema community. The community of Bethel is located approximately 6 hours by river from the city of Pucallpa, while Bena Jema is located within Pucallpa's boundaries, in the Yarinacocha district. All participants were assessed using Jean Piaget's clinical-critical method, with two tasks. In the first task, focusing on discrete quantities: different sets of cards with the picture of a fish were presented sequentially, some with an even number of units and some with an odd number. Participants were asked to choose and present back half of each set. In the second task, focusing on continuous quantities: participants were asked to choose and present half of a single raw spaghetti, which they needed to break with their hands. If the resulting pieces were unequal, they were asked to break them again and redistribute the results. Students from Bena Jema community were assessed with both tasks, while students from Bethel community were assessed only with the discrete quantities task. The results showed four developmental levels in the discrete quantities task. In the first level, participants took any one of two parts of the set to be "half", without checking if they were equal or whether putting them back together reconstituted the original whole. In the second level, participants took any one of two equal parts to be "half", but were inconsistent and accepted the possibility of the parts being unequal. In the third level, participants only took any one of two equal parts to be "half" but had difficulties splitting odd-numbered sets, including sets with fewer elements than the even-numbered ones they had previously split correctly. In the fourth level, the task was solved successfully with both even-numbered and odd-numbered sets. For the continuous quantities task, three levels were found. In the first level, any one of two raw spaghetti pieces was taken to be "half", without checking their evenness. In the second level, participants took any two equal pieces of the raw spaghetti to be "half", but without checking whether putting them back together reconstituted the original whole, with no extra parts remaining. In the third level, participants took any one of two equal pieces to be "half", checking whether putting them back together reconstituted the original whole. These results are consistent with reports from previous research assessing the notion of "half" in Western contexts. Results support universality in the development of the notion of "half", but show a delay in the participants' level of acquisition, taking Peru's national curriculum as reference. This study is a contribution to the understanding of the development of the notion of "half" in indigenous children living in Amazonian native communities, and shows the relevance of the Piagetian clinical-critical interview in these sociocultural contexts. The implications of these findings are discussed in relation to the universality of logical-mathematical knowledge, as well as the need to rethink the timing and manner in which the notion of "half" appears in the curriculum.

Keywords: half, constructivism, clinical-critical method, mathematics, Shipibo-Konibo

Introducción

Desde una mirada ingenua de la educación y el aprendizaje, el concepto de "mitad" puede parecer una noción sencilla que los niños, tempranamente, podrían manejar. Sin embargo, diversos estudios indican que este concepto supone un desarrollo complejo y es difícil de enseñar, y que los niños presentan distintas trayectorias y muchos errores en su construcción (Alcaro, Alstom y Katims, 2000; Ball, 1990; Brizuela, 2006; Castro Rodríguez, Rico Romero y Gómez; 2014; Gabriel, Szucs y Content, 2013; Gairín, 2013; Hansen, Jordan y Rodrigues, 2017; Hasemann, 1981; Newton, 2008; Nunes, Bryant y Watson, 2009).

La complejidad de este concepto se hace más evidente si consideramos que por mitad de un todo X entendemos su partición en dos partes, X_1 y X_2, que satisfacen lo siguiente:

1) La reunión de ambas partes reconstituye el todo original ($X_1 \cup X_2 = X$).

2) Las dos partes son disjuntas ($X_1 \cap X_2 = \emptyset$), esto es, no se superponen cuando se trata de un todo continuo, ni comparten un mismo elemento cuando se trata de un todo discreto.

3) Las dos partes son iguales en extensión ($|X_1| = |X_2|$).

4) Ninguna parte es vacía ($X_1 \neq \emptyset$; $X_2 \neq \emptyset$).

Además de estas propiedades, la noción de "mitad" guarda relación con otras nociones matemáticas. Por ejemplo, se relaciona con operaciones de partición y reunión, con la noción de "medio" (en figuras geométricas), con la noción de "proporción" y con la noción de "centro de gravedad" (Parrat-Dayan y Vonèche, 1992). En particular, se relaciona con la noción de "fracción", de la cual es un caso especial que supone demandas importantes en el desarrollo del pensamiento (Stelzer, Andrés, Introzzi, Canet-Juric y Urquijo, 2019). Como señala Brizuela (2006), las fracciones son expresión de relaciones de parte-todo, suponen una complejización del concepto de "número" y están a la base de los números racionales, además de permitir establecer relaciones entre diversas áreas y aplicaciones de las matemáticas. La dificultad con las fracciones, incluyendo decimales y porcentajes, es muy frecuente y constituye un obstáculo para el avance en la comprensión de otros temas matemáticos, entre los que se incluye el álgebra (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

Ya en 1960, Piaget, Inhelder y Szeminska, trabajando con cantidades discretas, investigaron la división de una totalidad en dos partes iguales y encontraron que la noción de "mitad" se desarrolla paulatinamente, conforme se van complejizando las capacidades cognitivas de los niños. En concreto, los niños de cuatro o cinco años presentaban dificultades para dividir una totalidad en dos partes iguales debido a una incapacidad para concebir simultáneamente las partes y el todo (la noción de "mitad" está vinculada a la conservación, ya que se debe conservar el todo para poder operar con la mitad). Los niños otorgaban respuestas aproximadas, ayudados por su percepción y no presentaban conservación de la cantidad cuando los materiales eran modificados perceptualmente. Los niños podrían encontrar soluciones para problemas que involucren la noción de "mitad" sin comprender las relaciones parte-todo, pues encontrar la respuesta correcta a un problema de este tipo no garantiza la consolidación de la noción (Parrat-Dayan y Vonèche, 1992). Existen estudiantes que, aunque pueden modelar satisfactoriamente una fracción, tienen dificultades para justificar sus respuestas o para conectar el simbolismo de la operación con la manipulación de materiales concretos (Moyer-Packenham, Bolyard y Tucker, 2014; Peck y Jencks, 1981).

En su trabajo con cantidades discretas, Piaget y Szeminska (1967) encontraron tres etapas de desarrollo de la noción de "mitad". En la primera, el niño puede dividir una totalidad en dos partes iguales mientras su percepción se lo permita, aunque si la cantidad es grande tiende a equivocarse. En cualquier caso, el niño no acepta que la totalidad se conserva al haber sido dividida en dos partes. En la segunda etapa, puede lograr la división de una totalidad en dos partes iguales por medio de la comparación cualitativa de la correspondencia término a término. Sin embargo, puede aún presentar dificultades para conservar el número cuando la totalidad es dividida. Finalmente, en la tercera etapa, los niños logran dividir una totalidad en dos partes iguales y conservar la cantidad más allá de las modificaciones perceptuales.

Hallazgos similares fueron reportados por Parrat-Dayan (1980) y Parrat-Dayan y Vonèche (1992), quienes encontraron que los niños pequeños no distinguen entre una mitad y un pedazo cualquiera de un todo. Los niños mayores se valían de la percepción para cortar una totalidad en el medio, asumiendo como mitades las partes resultantes. Algunos intentaban igualar las partes, pero ignoraban los pedazos sobrantes. Solo los mayores procuraron verificar que las partes fueran iguales y que además agotaran la totalidad original.

Se destacan dos conjuntos de estudios en el trabajo de Parrat-Dayan (1980) con niños de entre 4 y 12 años. En el primero se estudió la noción de "mitad" de un objeto continuo (un fideo crudo, que es difícil partir con las manos exactamente a la mitad) y se pidió a los participantes que entregaran la mitad. Los resultados mostraron cuatro niveles:

- Nivel I: Mitad y pedazos son confundidos. Uno de los pedazos es elegido como mitad.
- Nivel II: Mitad y medio son indistinguibles. Cortan justo en el medio, perceptivamente. No comparan los pedazos y se refieren a ambos como mitades.
- Nivel III: La mitad implica dos partes iguales. Cortan cerca de la mitad, comparan y constatan la diferencia, pero dejan los pedazos tal cual, refiriéndose a ambos como mitades. También pueden igualar los dos pedazos e ignorar el resto. O cortan exactamente en el medio. En general, no verifican que las dos mitades agoten el todo original.
- Nivel IV: Las dos partes iguales constituyen mitades y agotan el todo. Igualan los pedazos y parten el resto para completar las mitades.

El segundo conjunto de estudios analizó la noción de "mitad" en conjuntos discretos, al pedir a los participantes que entreguen la mitad de, por ejemplo, una hilera de peras representadas con papel. Al tratarse de objetos discretos, para cantidades pares es posible obtener la mitad con procedimientos sencillos como repartir uno a uno. Con cantidades impares se observan dificultades. Los resultados revelaron cuatro niveles:

- Nivel I: Mitad y parte son confundidas. Cualquier parte es mitad.
- Nivel II: Mitad y medio se confunden. Entregan la pera del medio. También entregan la mitad de una sola pera.
- Nivel III: Buscan que las dos partes guarden simetría y sean iguales, aunque no necesariamente su reunión agota el todo original.
- Nivel IV: Buscan la simetría de dos subconjuntos, cuya reunión además reconstituye el todo original.

Un hallazgo importante de Parrat-Dayan (1980) se vincula a la relación entre la mitad de objetos continuos y la mitad de conjuntos discretos. Por ejemplo, si se les pide a los niños que entreguen la mitad de una hilera de peras, no tienen dificultad si la cantidad de peras es par. Cuando la cantidad es impar (por ejemplo, siete) aparecen dificultades, pues es necesario partir una de las peras en dos (siendo esta una división en un todo continuo). Algunos niños optan por partir las siete peras a la mitad y luego entregar la mitad del total resultante (siete mitades de pera). Otros descartan una pera y toman la mitad de lo que queda (tres peras). Solo más adelante piensan en partir una pera a la mitad, para luego tomar la mitad de todo (tres peras y media).

Noción de "mitad" y currículo

Dado que con frecuencia se piensa que el concepto de "mitad" no reviste complejidad, y debido a que los programas escolares no siempre guardan relación con el desarrollo psicológico (Prophet y Vlaardingerbroek, 2003; Shayer y Adey, 1981; Taber, 2001;), se suelen plantear metas educativas muy poco oportunas y programas curriculares incongruentes. Por ejemplo, en el Diseño Curricular Nacional del 2009 se estipulaba que en primer grado los niños debían resolver problemas con las nociones de "doble", "triple" y "mitad" de números naturales menores que 20.

El Diseño Curricular Nacional 2016 (MINEDU, 2016), actualmente vigente, plantea como nivel esperado al final del ciclo III –para la competencia Resuelve problemas de cantidad– lo siguiente:

> Resuelve problemas referidos a acciones de juntar, separar, agregar, quitar, igualar y comparar cantidades, y las traduce a expresiones de adición y sustracción, doble y mitad. Expresa su comprensión del valor de

> posición en números de dos cifras y los representa mediante equivalencias entre unidades y decenas. Así también, expresa mediante representaciones su comprensión del doble y mitad de una cantidad; usa lenguaje numérico. Emplea estrategias diversas y procedimientos de cálculo y comparación de cantidades; mide y compara el tiempo y la masa, usando unidades no convencionales. Explica por qué debe sumar o restar en una situación y su proceso de resolución. (p. 235, énfasis de los autores)

Como desempeño para cuarto grado se pide establecer relaciones entre datos y acciones de partir una unidad o una colección de objetos en partes iguales, transformarlas en expresiones numéricas (modelo) de fracciones usuales y la adición y sustracción de estas. Se incluye también la fracción como parte-todo (cantidad discreta o continua), así como equivalencias y operaciones de adición y sustracción entre fracciones usuales usando fracciones equivalentes.

Proponer estos desempeños en esos grados indica que, al plantear los objetivos y competencias de las diversas propuestas curriculares, parecen no haberse considerado las dificultades en la construcción de la noción de "mitad", identificadas por diversas investigaciones. Esto es aún más problemático cuando se trata de estudiantes pertenecientes a pueblos indígenas de la Amazonía, donde hay menor cobertura escolar en comparación con la sierra y la costa (Instituto Nacional de Estadística e Informática, 2018) y donde las prácticas escolares pueden entrar en conflicto con los modos de aprender de la cultura local (Chavajay y Rogoff, 2002; Paradise, 2005; Paradise y Rogoff, 2009). Es sabido además que en contextos amazónicos el rendimiento en matemáticas suele ser más bajo que en la sierra y la costa, o que en contextos urbanos (SICRECE, 2018). No obstante, también es cierto que los niños de la Amazonía participan de actividades en proximidad a los adultos, por lo que son expuestos a un conjunto de experiencias que podrían ser ocasión para el desarrollo de otros conocimientos, no necesariamente evidenciados en las evaluaciones escolares (Greenfield, 1997).

Jean Piaget (1966) resaltó la importancia de estudiar los procesos de construcción del conocimiento en contextos culturales distintos al occidental. En esta línea, se han realizado distintas investigaciones de marco piagetiano en contextos culturales diversos (Ashton, 1975; Boonsong, 1968; Cowley y Murray, 1962; Dasen, 1970; Dasen, 1972; De Lacey, 1970; Lloyd, 1971; Nyiti, 1976; Za'rour, 1971), relevantes para dilucidar qué aspectos de la construcción del conocimiento son universales y cuáles son particulares. Con respecto a la noción de "mitad", hasta ahora las investigaciones la han explorado principalmente con niños occidentales y urbanos, por lo que cabe preguntarse por la manera en que se desarrolla en contextos culturales distintos. Así, este estudio cualitativo se plantea explorar el desarrollo de la noción de "mitad" en un grupo de niños del pueblo shipibo-konibo de la región Ucayali, en la Amazonía del Perú. El pueblo shipibo-konibo tiene una población estimada en 32 964 personas (Ministerio de Cultura del Perú, 2020). Pertenece a la familia lingüística Pano y se trata de un pueblo originario que tradicionalmente estaba asentado en las cuencas del río Ucayali y sus afluentes. En la actualidad, debido a procesos migratorios, existen comunidades shipibo-konibo en otras regiones del país, por ejemplo, en Madre de Dios, Loreto y Huánuco, e incluso en la ciudad de Lima donde han formado la comunidad nativa de Cantagallo.

Método

Se hizo uso de la entrevista clínico-crítico piagetiana, que tiene por objetivo identificar los cambios estructurales y cualitativos del pensamiento. Este tipo de entrevista se caracteriza por la formulación constante de contra-sugestiones ante las respuestas de los entrevistados, con el fin de evaluar la consistencia del pensamiento (Delval, 2001; Ducret, 2004; Parrat-Dayan, 2016).

En un primer momento, se realizó una evaluación en la comunidad de Bethel usando una tarea de cantidades discretas. A partir de este trabajo previo, en un segundo momento se evaluó a otro grupo de estudiantes de la comunidad de Bena Jema con la misma tarea y otra nueva centrada en cantidades continuas.

Participantes

Participaron 14 estudiantes de primaria, cuyas edades estaban en el rango de 7 a 13 años, de dos escuelas multigrado de educación intercultural bilingüe (EIB), de dos comunidades shipibo-konibo de la región Ucayali, en la Amazonía peruana. La comunidad de Bethel se encuentra a aproximadamente seis horas de distancia, en bote, de la ciudad de Pucallpa, mientras que la comunidad de Bena Jema se ubica a 40 minutos de la misma ciudad, en el distrito de Yarinacocha. La lengua materna de los participantes es el shipibo, aunque todos demostraron tener dominio del español.

Se realizó un muestreo intencional (Vieytes, 2004), pues se procuró contar con rangos de edades que permitieran observar diferencias en el desarrollo de la noción de “mitad”. Para acceder a los participantes de Bethel, se contó con el consentimiento de sus padres, el del jefe de la comunidad y el del profesor responsable de la escuela. Para acceder a los estudiantes de Bena Jema, se contó con el consentimiento de la directora de la escuela y del profesor a cargo del aula. A todos los niños se les explicó el objetivo de la evaluación y se les pidió su asentimiento. Los datos de los participantes se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1
Principales características de los participantes

Nombre	Edad	Sexo	Grado	Residencia
Wil	7 años	Masculino	Segundo	Bethel
Luc	7 años	Femenino	Segundo	Bethel
Les	9 años	Femenino	Tercero	Bethel
Man	9 años	Masculino	Tercero	Bethel
Dal	11 años	Femenino	Quinto	Bethel
Sha	11 años	Femenino	Sexto	Bethel
Maz	8 años	Femenino	Tercero	Bena Jema
Yal	8 años	Masculino	Tercero	Bena Jema
Key	9 años	Femenino	Cuarto	Bena Jema
Pat	9 años	Femenino	Cuarto	Bena Jema
Ale	9 años	Masculino	Cuarto	Bena Jema
Gis	12 años	Femenino	Sexto	Bena Jema
Ste	12 años	Femenino	Sexto	Bena Jema
Cri	13 años	Masculino	Sexto	Bena Jema

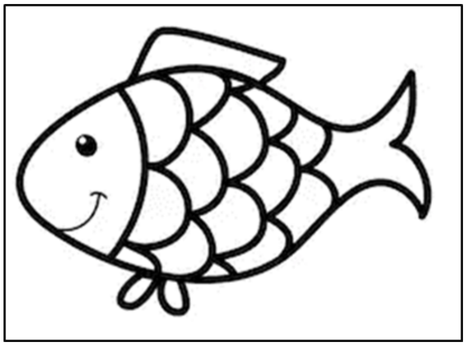
Tareas para la recolección de información

Tarea 1: Situación de pesca con tarjetas de peces (cantidad discreta)

Se les presentó a los estudiantes de la comunidad de Bethel y Bena Jema una historia contextualizada en una situación de pesca, actividad cotidiana en las comunidades shipibo-konibo, acompañada de material manipulable (un conjunto de tarjetas con un pez dibujado en cada una), tal como se ve en la Figura 1:

https://doi.org/10.16888/interd.2022.39.2.17

Figura 1
Modelo de tarjeta con figura de pez



La historia planteaba que el niño y el evaluador fueron juntos a pescar y obtuvieron un número específico de peces. Se le pedía al niño que los representara haciendo uso de las tarjetas. Seguidamente, se le decía que esa cantidad de peces era demasiada para una sola persona y que lo mejor era darle la mitad a un vecino. Entonces, se le solicitaba dividir por la mitad la cantidad que se había pescado. La historia fue narrada cuatro veces, cada vez con un número distinto (8, 16, 24, 23).

El desempeño de los participantes en cada tarea fue categorizado según los niveles de logro que se describen en la Tabla 2.

Tabla 2
Niveles de logro en cada historia de la tarea 1 y en la tarea 2

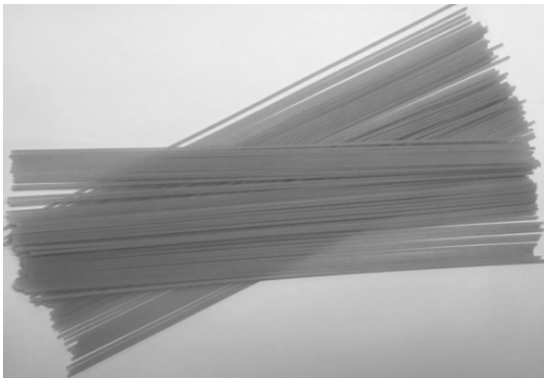
Tipos de logro	Descripción
Logra espontáneamente (A)	Llega a la respuesta correcta (resuelve la operación) de manera espontánea y sin ayuda. En las repreguntas se mantiene firme en su respuesta.
Logra con ayuda (B)	Llega a la respuesta correcta (resuelve la operación) con la ayuda del evaluador. En las repreguntas se mantiene firme en su respuesta.
Logra con ayuda, pero duda (C)	Llega a la respuesta correcta (resuelve la operación) con la ayuda del evaluador, pero duda y/o cambia su respuesta ante la repregunta o contra ejemplos que pone el evaluador.
No lo logra (D)	No llega a la respuesta correcta (no resuelve la operación) a pesar de las ayudas que le brinda el evaluador.

El análisis de los niveles de logro alcanzados, cada vez que se narraba la historia con un número distinto, permitió ubicar a cada niño en un estadio de desarrollo específico de la noción de "mitad" para cantidades discretas.

Tarea 2: Partición de fideo (cantidad continua)

Se presentó a los niños de la comunidad de Bena Jema un fideo crudo y se pidió que lo dividieran por la mitad. Se observó la estrategia que usaban para cumplir la tarea y las argumentaciones que daban para justificar su resultado. Dichos razonamientos fueron categorizados en niveles de desarrollo.

Figura 2
Tipo de fideo usado para la tarea de cantidad continua



Resultados

Tarea 1: Cantidad discreta (tareas con tarjetas de peces)

La Tabla 3 indica el nivel de desempeño de cada niño en cada una de las pruebas de la evaluación con cantidades discretas. En base a dichos niveles de logro se ubicó a cada uno en un estadio de desarrollo de la noción de "mitad" con cantidades discretas.

Tabla 3
Nivel de desarrollo de los niños en la tarea de peces

Nombre	Residencia	Prueba 1 Mitad (8)	Prueba 2 Mitad (16)	Prueba 3 Mitad (24)	Prueba 4 Mitad (23)	Nivel de desarrollo
Wil (7)	Bethel	D	D	D	D	Nivel 1
Roc (7)	Bethel	D	D	D	D	Nivel 1
Luc (7)	Bethel	B	B	D	D	Nivel 1
Les (9)	Bethel	D	D	D	D	Nivel 2
Man (9)	Bethel	C	D	D	D	Nivel 2
Dal (11)	Bethel	A	A	A	D	Nivel 3
Sha (11)	Bethel	A	A	A	A	Nivel 4
Maz (8)	Bena Jema	A	A	D	D	Nivel 2
Yal (8)	Bena Jema	C	C	D	D	Nivel 2
Key (9)	Bena Jema	D	D	D	D	Nivel 1
Pat (9)	Bena Jema	C	C	D	D	Nivel 2
Ale (9)	Bena Jema	A	A	A	D	Nivel 2
Gis (12)	Bena Jema	C	D	D	D	Nivel 1
Ste (12)	Bena Jema	A	A	A	A	Nivel 4
Cri (13)	Bena Jema	A	A	A	A	Nivel 4

Nota: (A) Logra espontáneamente, (B) Logra con ayuda, (C) Logra con ayuda, pero duda, (D) No logra.

A continuación, se describen y ejemplifican los estadios de desarrollo de la noción de "mitad" con cantidades discretas.

Nivel 1: Ausencia de la noción de "mitad"

Los participantes que se ubican en este nivel consideran que la mitad de una totalidad se obtiene al dividirla en dos partes no necesariamente iguales.

> Wil (7 años): Supongamos que hoy pescamos 8 peces para el almuerzo, ¿puedes poner 8 peces? – (cuenta ocho peces y los pone sobre la mesa) – Muy bien. Pero luego nos damos cuenta de que solo necesitamos la mitad, entonces decidimos darle la mitad al vecino, ¿cuántos peces debemos darle al vecino? – Dos - ¿podrías mostrarnos con las tarjetas? – (separa dos peces del grupo de ocho peces) - ¿Y si le diéramos estos 6 peces también le estaríamos dando la mitad? – Sí - ¿Y si hiciéramos esto? (El evaluador junta los 8 peces nuevamente y luego separa 3) ¿Si le damos estos tres le estaríamos dando también la mitad? – Sí.

Como puede observarse, para el niño no solo es válido dividir una cantidad por la mitad en dos partes distintas, sino que la diferencia entre estas dos cantidades puede ser considerable. Esto se evidencia de manera mucho más clara en la siguiente cita:

> Luc (7 años): Ahora imagínate que has pescado 24 peces, ¿puedes poner 24 peces? – (alinea uno a uno 24 peces) – Supongamos que tú quieres repartir estos peces entre dos personas para que cada una tenga la mitad ¿cómo lo harías? – (separa 4 peces de los 24 y obtiene un grupo de 20 y otro de 4).

Nivel 2: Noción de "mitad" en proceso

En este nivel, cualitativamente superior al anterior, los niños entienden que la noción de "mitad" es, en primera instancia, la división de una totalidad en dos partes iguales. Sin embargo, se considera que existen otras opciones posibles. Esto se observa en la siguiente cita:

> Les (9 años): Supongamos que hoy pescamos ocho peces – (pone ocho peces sobre la mesa) – Pero como no necesitamos tantos peces decidimos regalarle la mitad de estos peces a la vecina, ¿cuántos peces le debemos dar a la vecina? – (separa 4 peces) Cuatro - ¿Y si le damos así? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 4 y lo pone en el otro grupo, de tal manera que se tiene un grupo de 3 y otro de 5) ¿Si le damos estos (grupo de 5 peces) le estaríamos dando la mitad? – Sí - ¿Y si le damos estos (grupo de 3 peces) le estaríamos dando la mitad? – Sí.

En este caso la noción de "mitad" no se encuentra consolidada, puesto que, aunque la primera respuesta que presenta el participante siempre es correcta, concibe otras opciones como válidas. Es decir, no hay consistencia en las respuestas cuando se presenta una contrasugestión, pues el concepto de "mitad" no es considerado de manera unívoca.

Nivel 3: Noción de "mitad" lograda (pero solo con números pares)

En este nivel los niños entienden la mitad como la división de una totalidad en dos partes iguales. Esta idea se mantiene ante las contrasugestiones. Esto se ejemplifica en la siguiente cita:

> Dal (11 años): Supongamos que ahora que pescamos 16 peces, como son muchos para nosotros decidimos darle la mitad al vecino. ¿Cuánto sería la mitad? – (permanece en silencio) – Si quieres puedes usar las tarjetas – (saca 16 peces y los pone sobre la mesa, luego cuenta 8 y los separa del grupo) – ¿Cuánto sería la mitad? – Ocho - ¿Y si hiciéramos esto? (El evaluador saca un pez de uno de los grupos de 8 y lo pasa al otro grupo. Esto genera un grupo de 7 y uno de 9) – No, está mal. Hay un grupo que tiene más.

A diferencia del nivel anterior, la respuesta es correcta y además es resistente ante la contrasugestión. Sin embargo, los niños de este estadio presentan dificultades ante un número impar:

> Dal (11 años): Supongamos que pescamos 23 peces, pero nos parece que es mucho para nosotros, así que decidimos darle la mitad al vecino ¿cuántos peces debemos darle? – Doce. – ¿Puedes mostrarnos con las tarjetas? – (pone sobre la mesa 23 peces) – Ahora queremos darle la mitad al vecino, ¿podrías separar lo que le vamos a dar? – (separa 12 peces) - ¿Y en cada grupo hay la mitad? – (permanece en silencio) - ¿O hay uno que tiene más? – Uno tiene más - ¿Cómo podríamos repartir para tener la mitad para el vecino? – (permanece en silencio) - ¿Cuántos peces hay en este grupo? – Doce - ¿Y en este grupo? – Once - ¿Y podemos decir que cada uno tiene la mitad? – Sí - ¿Y esta mitad (grupo de 11) es igual a esta mitad (grupo de 12)? – No - ¿cómo podríamos hacer para que sean iguales? – (El niño retira un pez del grupo de 12) Así.

En la cita anterior se observa que el niño no logra dividir el pez que convierte el conjunto en una cantidad impar. En consecuencia, la solución que plantea es ignorar o eliminar del grupo al elemento que obstaculiza la división por la mitad.

Nivel 4: Noción de "mitad" con números impares

A diferencia del estadio anterior, los niños que se encuentran en este nivel, cualitativamente superior, pueden dividir cantidades pares e impares. Por ejemplo, en la siguiente cita se presenta a Sha el mismo ejercicio expuesto a la estudiante anterior:

> Sha (11 años): Ahora supongamos que hemos pescado 23 peces, pero son muchos para nosotros, así que decidimos darle la mitad a nuestro vecino ¿cuántos peces debemos darle? – (pone, uno a uno, 23 peces sobre la mesa, luego con esos 23 peces hace dos grupos de once y se queda con un pez fuera de los dos grupos). Este sobra –¿Y en cada grupo, cuántos peces hay? –Once –¿Y hay otra forma de que nos des la mitad o es la única? – Este lo tendríamos que partir (en referencia al pez que sobró) –¿Y qué haríamos si lo partimos? –Darle una parte a cada uno.

Como se observa, cuando se le pregunta si existe otra forma de obtener la mitad del conjunto de 23 peces, Sha propone partir el pez sobrante y asignar un pedazo a cada uno de los grupos. Sucede lo mismo en el siguiente caso:

> Ste (12 años): Supongamos que hemos pescado 23 peces. ¿Cuántos peces hay acá? –Veintitrés. –Ahora supongamos que son muchos peces para nosotros, así que vamos a regalarle la mitad al vecino. ¿Puedes separar los peces que serían para el vecino? –(Ste empieza a separar en correspondencia uno a uno los peces que irán al cúmulo A y B) –¿Cuántos peces hay acá (cúmulo A)? –¡Once! Aquí hay once, ¿no? –Y aquí (cúmulo B), ¿cuántos hay? –Doce. –Acá (cúmulo A) tenemos once, y acá (cúmulo B) tenemos doce. ¿Cómo podríamos hacer para darle la mitad al vecino? –(Ste separa un pez del cúmulo B) Sacarle uno. –¿Y qué hacemos con este uno? –Le pedaceamos.[1] Le pedaceamos. –¿Cómo le pedaceamos? –(Ste señala con el dedo: dividir el pez por la mitad) –Y quedarían dos partes, ¿no es cierto? ¿Y qué haríamos con las partes? –Ponemos uno acá (cúmulo A) y otro acá (cúmulo B).

Tarea 2: Cantidad continua (dividir un fideo crudo por la mitad)

La siguiente tabla sintetiza los resultados de la evaluación de la noción de "mitad" con una cantidad continua. Los desempeños han

[1]Se refiere a partir el pez en pedazos.

sido organizados en tres estadios que evidencian un progreso cualitativo en la comprensión de la noción de "mitad" con este tipo de cantidad.

Tabla 4

Nivel de desarrollo en la evaluación de cantidades continuas

Nombre	Tipo de logro	Nivel de desarrollo
Maz (8)	NL	Nivel 2
Yal (8)	NL	Nivel 1
Key (9)	NL	Nivel 1
Pat (9)	NL	Nivel 2
Ale (9)	NL	Nivel 2
Gis (12)	NL	Nivel 2
Ste (12)	B	Nivel 3
Cri (13)	B	Nivel 3

Nota: (A) Logra espontáneamente, (B) Logra con ayuda, (C) Logra con ayuda, pero duda, (D) No logra.

A continuación, se describen los tres niveles de desarrollo de la noción de "mitad" en cantidades continuas.

Nivel 1: Mitad como división de una totalidad

En este nivel se concibe la noción de "mitad" como la división de una totalidad en dos partes. No se considera importante que estas sean iguales. Se aceptan como mitades los dos fragmentos que se obtienen al dividir un objeto haciendo un solo corte.

> Key (9 años): ¿Qué son estos? ¿Son fideos, no? –Sí –Mira, ¿Tú crees que podrías darme a mí la mitad de este fideo y tú quedarte con la otra mitad? –(Key parte el fideo en dos, consigue dos partes diferentes en longitud, y entrega inmediatamente una de las partes) Ya. –¿Me estás dando la mitad del fideo? –Sí –¿Qué podrías hacer para saber que esta es la mitad? –(Key no responde) –Si yo me quedo con esta parte y tú te quedas con esta parte (entrevistador entrega a Key el trozo de fideo que ella previamente le entregó y toma el otro trozo, es decir, intercambia los fideos), ¿yo me quedaría con la mitad? –Sí, también.

Como se puede notar, Key no compara las partes del fideo para decidir si las dos partes que ha obtenido son iguales. Considera que cualquiera de las dos partes, así sean distintas en longitud, representa la mitad del objeto que se le solicitó dividir.

Nivel 2: Mitad como la igualdad de dos partes de una totalidad

En este nivel la noción de "mitad" es entendida como la obtención de dos partes iguales de una totalidad. A pesar de que este nivel es significativamente más avanzado que el anterior, se puede notar que no se respeta la totalidad del objeto que se solicitó dividir.

> Maz (8 años): ¿Qué es esto que tengo en mi mano? –Un fideo –Yo quiero que dividamos este fideo por la mitad, para que tú tengas una mitad y yo tenga la otra mitad. –(Maz parte el fideo en dos, pero consigue un trozo más largo que el otro. Maz corta el excedente del fideo más largo, pero al hacerlo el fideo más largo se convierte en el más corto. Maz continúa cortando los fideos hasta que consigue dos pedazos idénticos y los entrega al evaluador) –¿Me estás dando las dos mitades del fideo?

–Sí –¿Y qué hacemos, ahora, con los trozos que han quedado en la mesa (señalando a las partes del fideo que fueron cortadas)? –Se lo damos al perro.

Como expresa el desempeño de Maz, la preocupación de los que se ubican en este estadio de desarrollo es obtener dos partes iguales que sean extraídas de una totalidad. Sin embargo, estas partes no necesitan abarcar toda la extensión del objeto dividido.

Nivel 3: Mitad como la división de una totalidad en dos partes iguales

En este último nivel el participante comprende que la mitad implica la división de una totalidad en dos partes iguales en extensión y que, además, dichas partes deben abarcar la totalidad del objeto dividido.

Cri (13 años): Ahora, para terminar, tenemos un fideo y quiero que dividamos este fideo por la mitad, para que tú tengas una mitad y yo tenga la otra mitad. –(Cri intenta hacer un corte en medio del fideo. Obtiene dos partes distintas en longitud. Iguala las dos partes cortando el excedente del fideo más largo. El excedente cortado cae en la mesa. Luego, entrega una de las partes al entrevistador) – Ahora, ¿tú tienes la mitad del fideo y yo tengo la otra mitad del fideo? –Sí. –¿Esto (la parte que tiene el entrevistador) sería la mitad del fideo? –No. –¿Por qué no? –Porque falta este pedacito (el excedente que había caído en la mesa) –¿Qué habría que hacer? – (Cri toma el excedente que había caído en la mesa) Para ti un pedazo y para mí un pedazo.

Como se ha observado, las secuencias encontradas evidencian la aparición progresiva de las propiedades que definen la mitad, como se indicó al inicio de este trabajo. Es decir, se pasa de considerar como mitad cualesquiera de dos partes, luego se exige la igualdad de la extensión de las partes y finalmente, se verifica que la reunión reconstituya el todo original.

Discusión y conclusiones

El presente estudio tuvo como objetivo identificar los niveles de desarrollo de la noción de “mitad” en un grupo de niños del pueblo shipibo-konibo, por medio de dos tareas: una para la mitad de un conjunto discreto y otra para la mitad de un conjunto continuo. A partir de los resultados se pueden elaborar las siguientes conclusiones.

En primer lugar, queda claro que la noción de “mitad” reviste una complejidad mayor a la aparente. A pesar de que las tareas utilizaban materiales manipulables y consistían en actividades sencillas como repartir, los participantes tuvieron dificultades para resolverlas, incluso hasta la adolescencia. Como se explicó, comprender qué es una mitad supone comprender sus propiedades, lo que se logra progresivamente y no se reduce a meras intuiciones perceptivas.

En segundo lugar, los resultados obtenidos, en líneas generales, convergen con lo recogido en contextos muy distintos (Parrat-Dayan, 1980; Parrat-Dayan y Vonèche 1992), lo que apoya la existencia de aspectos universales en la construcción de la noción de “mitad”.

En tercer lugar, se observa una discrepancia entre los niveles de desarrollo de la noción de “mitad” de los participantes de este estudio y las metas planteadas por el Programa Curricular en Educación Primaria (MINEDU, 2016) para cada grado. En dicho documento, la noción de “mitad” se plantea como meta desde el segundo grado de primaria, momento en el que se propone que los estudiantes sean capaces de obtener la mitad de números de hasta dos cifras. Sin embargo, en nuestro estudio los participantes que pertenecen a este grado se ubican en el nivel más bajo de desarrollo de esta noción, ya sea con cantidades discretas o continuas. Esto implica que no solo no son capaces de obtener la mitad de un número de una o dos cifras, sino que no han logrado comprender todavía que dividir una totalidad por la mitad implica la obtención de dos partes iguales.

Por otro lado, los participantes de tercer y cuarto grado figuran, mayoritariamente, en el nivel 2 de desarrollo de la noción de "mitad" con cantidades discretas y continuas; los que no se ubican en este nivel se encuentran en un nivel inferior. Esto implica que los estudiantes de tercer grado del estudio que se informa entienden que la mitad puede ser la división de una totalidad en dos partes iguales, pero creen que esta es solo una de las posibles soluciones cuando se les pide dividir algo por la mitad, pues su respuesta puede cambiar cuando se da una contrasugestión. Esto contrasta con las metas del Programa Curricular en Educación Primaria (Ministerio de Educación del Perú, 2016) respecto de la noción de "mitad" para los grados tercero y cuarto, ya que propone que los estudiantes dividan por la mitad números de tres cifras y trabajen con fracciones, respectivamente. Es importante señalar que ni en la Propuesta de Diseño Curricular Diversificado con Enfoque Ambiental (Ministerio de Educación del Perú, 2011), que detalla las metas esperadas para los estudiantes que se encuentran en la región Ucayali, ni en la propuesta pedagógica para la EIB, titulada "Hacia una Educación Intercultural Bilingüe de Calidad" (Ministerio de Educación del Perú, 2013), aparece directamente la noción de "mitad" como un objetivo para los grados mencionados.

Finalmente, los estudiantes de quinto y sexto grado de primaria, según el currículo nacional, deberían poder multiplicar fracciones y trabajar con números decimales. Sin embargo, ninguno de ellos logra el nivel más alto en las dos evaluaciones de este estudio y solo una estudiante, expuesta únicamente a la primera evaluación, logra el nivel más alto en esa tarea.

Como bien plantean Haase, Fritz y Räsänen (2020), existen diversos factores, de índole distinta, relacionados con el desarrollo de las habilidades numéricas. Uno de ellos es el currículo escolar, que condiciona la práctica docente y que, lamentablemente, es con frecuencia muy ambicioso y guarda poca relación con el desarrollo cognitivo, las capacidades y los procesos de aprendizaje de los niños (Carretero, 2002; Coll, Palacios y Marchesi, 2014; Crahay, 1996; Delval, 1981; Horn, 2007). En Perú, la existencia de una brecha entre lo que se plantea en los documentos y el currículo para matemáticas y lectura y lo que realmente ocurre en las aulas ha sido puesta en evidencia por León (2016) y por Burga León (2015). Contrastar lo propuesto por el Programa Curricular en Educación Primaria (MINEDU, 2016) con los resultados de este estudio y otro similar (Parrat-Dayan y Vonèche, 1992) permite observar que el dominio de la noción de "mitad" como logro educativo se plantea prematuramente en la educación básica, pues su comprensión implica un proceso constructivo largo y complejo, que no se completa en los primeros grados de primaria. En el programa parece considerarse, erróneamente, que la dificultad de dicha noción radica en el tamaño del número a dividir. Por ejemplo, se piensa que obtener la mitad de un número de dos cifras es más sencillo que obtener la mitad de un número de tres cifras. Sin embargo, la investigación indica que la mayor dificultad en esta noción no se encuentra únicamente en el tamaño del número sino también en si es par o impar, pues los números impares solo pueden ser divididos por la mitad en el estadio más alto de la construcción de esta noción.

En suma, el presente estudio es una contribución a la comprensión del desarrollo de la noción de "mitad" en contextos no urbanos y evidencia la pertinencia de la entrevista clínico-crítica piagetiana en estos contextos. En particular, este trabajo muestra que el desarrollo de la noción de "mitad" en un grupo de niños shipibo-konibo de la Amazonía del Perú sigue una secuencia semejante a la reportada en trabajos con población no indígena de otros lugares del mundo. Asimismo, los resultados evidencian que algunas de las metas planteadas en los documentos educativos oficiales no parecen ser asequibles para los niños de edades y contextos como los estudiados, por lo que es recomendable analizar y repensar dichas metas.

Referencias

Alcaro, A., Alston, S. y Katims, N. (2000). Fractions Attack! Children Thinking and Talking Mathematically. *Teaching Children Mathematics*, *6*(9), 562-567. https://doi.org/10.5951/TCM.6.9.0562

Ashton, P. T. (1975). Cross-cultural Piagetian research: An experimental perspective. *Harvard Educational Review*, *45*(4), 475-506. https://doi.org/10.17763/haer.45.4.kpq1578t13tk0541

Ball, D. L (1990). Prospective Elementary and Secondary Teachers' Understanding of Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132–144. https://doi.org/10.2307/749140

Brizuela, B. (2006). Young Children's Notations for Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(3), 281-305. https://doi.org/10.1007/s10649-005-9003-3

Boonsong, S. (1968). *The development of conservation of mass, weight and volume in Thai children.* [Tesis de Maestría, College of Education, Bangkok, Tailandia].

Burga León, A. (2015). *Aprendizajes de primero a sexto de primaria en lectura y matemática: un estudio longitudinal en instituciones educativas estatales de Lima Metropolitana*. Ministerio de Educación del Perú. http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/123456789/3616

Carretero, M. (2002). *Construir y enseñar las ciencias experimentales*. Buenos Aires: Aique.

Castro Rodríguez, E., Rico Romero, L. y Gómez, P. (2014). La enseñanza inicial del concepto de fracción por maestros en formación. *Contextos Educativos*. *Revista de Educación*, *18*, 9-23.

Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (2014). *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid: Alianza Editorial

Cowley, J. J. y Murray, M. (1962). Some aspects of the development of spatial concepts in Zulu children. *Journal for Social Research*, *13*, 1-18.

Crahay, M. (1996). ¿Una cabeza bien hecha o una cabeza repleta? Replanteamiento constructivista de un antiguo dilema. *Perspectivas*, *36*(1), 59-91.

Chavajay, P. y Rogoff, B. (2002). Schooling and traditional collaborative social organization of problem solving by Mayan mothers and children. *Developmental Psychology*, *38*(1), 55–66. https://doi.org/10.1037/0012-1649.38.1.55

Dasen, P. R. (1970). *Cognitive development in Aborigines of Central Australia: concrete operations and perceptual activities.* [Tesis de Doctorado, Australian National University, Camberra, Australia].

Dasen, P. R. (1972). Cross-cultural Piagetian research: A summary. *Journal of Cross-cultural Psychology*, *3*(1), 23-40. https://doi.org/10.1177%2F002202217200300102

De Lacey, P. R. (1970). A cross-cultural study of classificatory ability in Australia. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, *1*(4), 293-304. https://doi.org/10.1177%2F135910457000100401

Delval, J. (1981). Programas escolares y desarrollo psicológico. *Infancia y Aprendizaje*, *4*(14), 123–132. https://doi.org/10.1080/02103702.1981.10821846

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños: Introducción a la práctica del método clínico*. Madrid: Paidós.

Ducret, J. J. (2004). *Méthode clinique-critique piagétienne*. Ginebra: Service de la Recherche en Education.

Gabriel, F., Szucs, D. y Content, A. (2013). The Development of the Mental Representations of the Magnitude of Fractions. *Plos One*, *8*(11), 1-14. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0080016

Gairín Sallán, J. (2013). Sistemas de representación de números racionales positivos: Un estudio con maestros en formación. *Contextos Educativos*. *Revista de Educación*, *4*, 137-159. https://doi.org/10.18172/con.490

Greenfield, P. M. (1997). You can't take it with you: Why ability assessments don't cross cultures. *American Psychologist*, *52*(10), 1115–1124. https://doi.org/10.1037/0003-066X.52.10.1115

Haase, V. G., Fritz, A. y Räsänen, P. (2020). Research on numerical cognition in Latin American countries. *Studies in Psychology*, *41*(2), 217-244. https://doi.org/10.1080/02109395.2020.1748843

Hansen, N., Jordan, N. y Rodrigues, J. (2017). Identifying learning difficulties with fractions: A longitudinal study of student growth from third through sixth grade. *Contemporary Educational Psychology*, *50*, 45-59. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.11.002

Haseman, K. (1981). On Difficulties with Fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(1), 71-87. https://doi.org/10.1007/BF00386047

Horn, I. (2007). Fast Kids, Slow Kids, Lazy Kids: Framing the Mismatch Problem in Mathematics Teachers' Conversations. *The Journal of the Learning Sciences,16*(1), 37-79. http://www.jstor.org/stable/25473540

Instituto Nacional de Estadística e Informática [INEI] (2018). Centros Educativos, según nivel y modalidad 2008-2018. https://www.inei.gob.pe/estadisticas/indice-tematico/establecimientos-educativos-11865/

León, F. R. (2016). Los aprendizajes de primero a sexto de primaria en lectura y matemática y la necesidad de sincerar el currículum nacional de estudios. *Propósitos y Representaciones*, *4*(1), 363–384. https://doi.org/10.20511/pyr2016.v4n1.93

Lloyd, B. B. (1971). Studies of conservation with Yoruba children of differing ages and experience. *Child Development*, *42*(2), 415-428. https://doi.org/10.2307/1127476

Ministerio de Educación del Perú [MINEDU]. (2009). *Diseño Curricular Nacional de la Educación Básica Regular*. Lima: MINEDU.

Ministerio de Educación del Perú [MINEDU] (2011). *Propuesta de Diseño Curricular Diversificado con Enfoque Ambiental*. Ucayali: Dirección Regional de Educación de Ucayali.

Ministerio de Educación del Perú [MINEDU]. (2013). *Hacia una Educación Intercultural Bilingüe de Calidad. Propuesta Pedagógica*. Lima: Ministerio de Educación del Perú. http://www.minedu.gob.pe/minedu/archivos/a/002/01-general/2-propuesta_pedaggogica_eib_2013.pdf

Ministerio de Educación del Perú [MINEDU]. (2016). *Programa Curricular en Educación Primaria*. Lima: Ministerio de Educación del Perú.

Ministerio de Cultura del Perú (2020). *Base de datos de pueblos indígenas u originarios*. https://bdpi.cultura.gob.pe/pueblos/shipibo-konibo

Moyer-Packenham, P., Bolyard, J. y Tucker, S. (2014). Second-Graders' Mathematical Practices for Solving Fraction Tasks. *Investigations in Mathematics Learning*, *7(*1), 54-81. https://doi.org/10.1080/24727466.2014.11790338

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Newton, K. J. (2008). An extensive analysis of preservice elementary teachers' knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110. https://doi.org/10.3102%2F0002831208320851

Nyiti, R. M. (1976). The development of conservation in the Meru children of Tanzania. *Child Development*, *47*(4), 1122-1129. https://doi.org/10.2307/1128451

Nunes, T., Bryant, P. y Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning. Introduction and summary of findings*. Londres: Nuffield Foundation.

Paradise, R. (2005). Motivación e iniciativa en el aprendizaje informal. *Sinéctica*, *26*, 12–21. http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=trueydb=zbhyAN=20019710ylang=esysite=ehost-live

Paradise, R. y Rogoff, B. (2009). Side by Side: Learning by Observing and Pitching In. *Ethos*, *37*(1), 102–138. https://doi.org/10.1111/j.1548-1352.2009.01033.x

Parrat-Dayan, S. (1980). Étude *génétique de l'acquisition de la notion de moitié.* [Tesis de doctorado, Université de Genève]. Ginebra, Suiza.

Parrat-Dayan, S. (2016). Conversaciones libres con los niños: El método clínico piagetiano. Relación entre teoría y método. En S. Frisancho (Coord.), *Ensayos constructivistas* (pp. 51-76). Lima: Fondo Editorial PUCP.

Parrat-Dayan, S. y Vonèche, J. (1992). *Conservation and the notion of "half"*. (C. Greenbaum, Trans.). En J. Bideaud, C. Meljac y J. P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: Children's developing numerical abilities* (p. 67–82). Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Peck, D. y Jencks, S. (1981). Conceptual Issues in the Teaching and Learning of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(5), 339-348. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.12.5.0339

Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960). *The Child's Conception of Geometry.* London: Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. y Szeminska, A. (1967). *Génesis del número en el niño* (3rd ed.). Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. (1966). Nécessité et signification des recherches comparatives en psychologie génétique. *International Journal of Psychology*, *1*(1), 3-13. https://doi.org/10.1080/00207596608247041

Prophet, R.B. y Vlaardingerbroek, B. (2003). The relevance of secondary school chemistry education in Botswana: a cognitive development status perspective. *International Journal of Educational Development*, *23*(3), 275–289. https://doi.org/10.1016/S0738-0593(02)00056-1

Shayer, M. y Adey, P. (1981). *Towards a Science of Science Teaching: Cognitive Development and Curriculum Demand*. Heinemann Educational Books.

Stelzer, F., Andrés, M. L., Introzzi, I., Canet-Juric, L., Urquijo, S. (2019). El conocimiento de las fracciones. Una revisión de su relación con factores cognitivos. *Interdisciplinaria. Revista de Psicología y Ciencias Afines*, *36*(2), 185-201. https://doi.org/10.16888/interd.2019.36.2.12

SICRECE (2018). *Sistema de consulta de resultados de la evaluación censal de estudiantes*. https://sistemas15.minedu.gob.pe:8888/evaluacion_censal_publico

Taber. K. S. (2001) The Mismatch between Assumed Prior Knowledge and the Learner's Conceptions: A typology of learning impediments. *Educational Studies*, *27*(2), 159-171. https://doi.org/10.1080/03055690120050392

Vieytes, R. (2004). *Metodología de la investigación en organizaciones, mercado y sociedad: epistemología y técnicas*. Buenos Aires: De las Ciencias.

Za'rour, G. I. (1971). The conservation of number and liquid by Lebanese school children in Beirut. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, *2*(2), 165-172. https://doi.org/10.1177%2F002202217100200205

Recibido: 27 de septiembre de 2020
Aceptado: 23 de febrero de 2022